

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Profil real, specializarea științele naturii

IX. osztály

1. Az ABC háromszögben, az AD oldalfelező és a $[CE]$ szögfelező a P pontban metszik egymást. Jelölje $\{F\} = BP \cap AC$.

a) Alkalmazva a Ceva tétel összefüggését, igazoljuk, hogy $EF \parallel BC$.

b) Igazoljuk, hogy a CEF háromszög egyenlőszárú.

2. Adott a 2 cm oldalhosszúságú ABC egyenlő oldalú háromszög, melynek oldalain felvesszük az $M \in BC, N \in AC, P \in AB$ pontokat úgy, hogy $BM = x, CN = y$ és $AP = z$, ahol $x, y, z \in (0, 2)$.

a) Számítsuk ki az ABC háromszög területét;

b) x, y, z függvényében számítsuk ki a PBM, MCN és PAN háromszögek területét.

c) Igazoljuk, hogy: $x(2-z) + y(2-x) + z(2-y) < 4$.

3. a) Bizonyítsuk be, hogy $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{4}{a+b}, (\forall) a, b \in \mathbb{R}^*, a \neq b$.

b) Bizonyítsuk be, hogy $\frac{1}{501} + \frac{1}{502} + \dots + \frac{1}{1000} > \frac{13}{20}$.

4. Az M_1 és M_2 csiga reggel 7 órakor elindult az A pontból a B pontba, egyenes úton haladva. Az M_1 sebessége 12 m / óra. M_2 először 8 m / órás sebességgel haladt, de indulás után 2 órával felmászott a T teknősbéka hátára, amelyik szintén A-ból B-be haladt 20 m / órás sebességgel. Az M_2 csiga és a T teknős utolérte az M_1 csigát, és további 4 óra eltelte után B-be érkeztek. Az M_2 csiga leszállt a T teknős hátáról és azonnal elindult B-ből A-ba egy kisebb, 4 m / órás sebességgel.

a) Hány órakor érte utol az M_2 csiga M_1 -et?

b) Mekkora a távolság A és B között?

c) Melyik két egész számmal kifejezett óra között találkozott M_1 az M_2 csigával, mikor az már visszafele haladt, B-ből A-ba ?

Megjegyzés: Munkaidő 3 óra; Minden feladat kötelező; Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Profil real, specializarea științele naturii

X. osztály

1. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

a) $\log_3(x+3) \cdot \log_{x-3} 3 = 2, x \in \mathbb{R};$

b) $4^x - 9^x = 10^x - 15^x, x \in \mathbb{R}.$

2. Adott a $z^2 + 2i(\cos a) \cdot z - \cos^2 a = 0$ egyenlet, ahol $a \in \mathbb{R}$. Határozzuk meg az a értékeit amelyekre az egyenletnek $z = i \cdot \sin a$ gyöke.

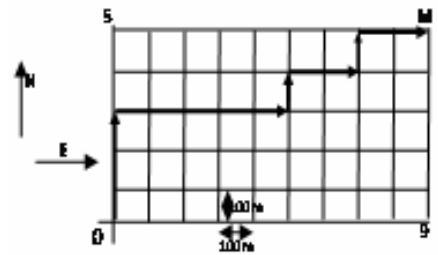
3. a) Bizonyítsuk be, hogy $x - y = (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}), \forall x, y \in \mathbb{R};$

b) Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$, bármely n nemnulla természetes szám esetén.

4. A mellékelt ábrán New York város utcáinak egy részét látjuk. Oswald az $O(0,0)$ pontban van és el szeretne jutni Maryhez, aki az $M(9,5)$ pontban van. Csak északra vagy keletre haladhat, O-ból indulva, egy törött vonal mentén (amint az ábrán látszik)

a) Hány métert kell haladnia keletre (vízszintesen) és hányat északra (függőlegesen) ahhoz, hogy M-be érjen?

b) Hányféleképpen teheti meg Oswald az utat O-ból M-be? (Az M pont koordinátái hosszúság-egységekben vannak megadva, egy egység hossza 100 m)



Megjegyzés: Munkaidő 3 óra; Minden feladat kötelező; Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Profil real, specializarea științele naturii

XI. osztály

1. Adottak az $f, g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$ és $g(x) = x\sqrt{1-x^2} - \arcsin x - 4\arctg\left(\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{x}\right)$ függvények.
- a) Számítsuk ki az $f'(x)$ és $g'(x)$ függvényeket.
- b) Igazoljuk, hogy $f(x) = 2\pi + g(x)$, $\forall x \in [0,1]$
2. Egy tárgy szabadon esik; feltételezzük, hogy a levegő ellenállása egyenesen arányos a tárgy által elért sebesség négyzetével. A méter / szekundumban kifejezett v sebesség eléréséhez szükséges másodpercekben kifejezett t időt az alábbi képlet írja le: $t(v) = \ln \frac{60+v}{60-v}$, $v \in [0,60)$.
- a) Ha $v = 0$ m/s a kezdeti sebesség, mennyi idő múlva éri el a tárgy a $v = 27,57$ m/s-os sebességet? ($\ln 2,7 \approx 1$)
- b) Mekkora sebességet ér el az illető tárgy 3 másodperc alatt? ($e^3 \approx 19,90$)
- c) Határozd meg a $t = t(v)$ függvény függőleges aszimptotáját!

Megjegyzés: A számításokban az Euler-féle e szám közelítő értéke 2,7, és a számításokat két tizedesnyi pontossággal kell elvégezni.

3. Tekintsük az $M_3(\mathbb{R})$ halmazban az $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixot.
- a) Igazoljuk, hogy $A^3 = O_3$ és $\det(I_3 + A) \cdot \det(I_3 - A + A^2) = 1$
- b) Számítsuk ki $2 \cdot A + 3 \cdot A^2 + 4 \cdot A^3 + \dots + 2011 \cdot A^{2010}$
- c) Számítsuk ki $(I_3 + A)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

4. Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $X(a) = \begin{pmatrix} 1+2a & a \\ -2a & 1-a \end{pmatrix}$ egy mátrix.
- a) Igazoljuk, hogy $X(a) \cdot X(b) = X(a+b+ab)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$;
- b) Igazoljuk, hogy $X^n(1) = X(2^n - 1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Megjegyzés: Munkaidő 3 óra; Minden feladat kötelező; Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Profil real, specializarea științele naturii

Clasa a XII-a

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)e^{-x}$ függvény. Jelöljük $A(n)$ - nel annak a síkidomnak a területét, amelyet az f függvény grafikus képe, az Ox tengely és az $x=1$ és $x=n$ egyenletű egyenesek közrezárnak, ahol $n \in (1, \infty)$.
 - a) Számítsuk ki: $A(n)$.
 - b) Számítsuk ki: $\lim_{n \rightarrow \infty} A(n)$.
2. Számítsuk ki: $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} \cdot dx$
3. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; és $M_t = \frac{t}{2} \cdot A + \frac{1}{2t^2} \cdot B$ mátrixok és $G = \{M_t \mid t > 0\}$.
 - a) Számítsuk ki: $A^2, B^2, A \cdot B, B \cdot A$
 - b) Mutassuk ki, hogy G stabil részhalmaza az $M_2(\mathbb{R})$ halmaznak a mátrixok szorzására nézve.
 - c) Mutassuk ki, hogy (G, \cdot) Ábel-féle csoport.
4. Adott a $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ valós együtthatójú polinom.
 - a) Ha $a, b, c \in \mathbb{Q}$ és $P(1) = -2$, $P(\sqrt{2}) = 0$, oldjuk meg a $P(x) = 0$ egyenletet.
 - b) Ha $a, b, c \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $|a|, |b|, |c| \leq 2010$ és létezik $x \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $P(x) = 0$, igazoljuk, hogy $x \leq 2010$.

Megjegyzés: Munkaidő 3 óra; Minden feladat kötelező; Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak.